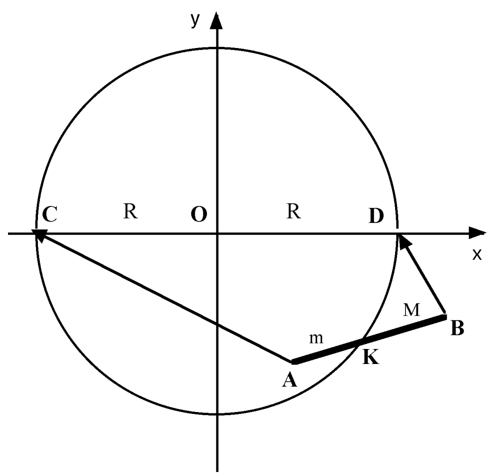
1. Due aste materiali pesanti omogenee AK e KB, di ugual lunghezza l e masse m ed M rispettivamente, sono saldate in K in modo da costituire un'unica asta non omogenea di lunghezza $2l$. Il punto medio K e' vincolato a scorrere senza attrito lungo una circonferenza di raggio R posta su un piano verticale e l'asta AB e' libera di ruotare nel piano verticale attorno a K. Ai due vertici A e B dell'asta sono applicate due molle di uguale costante elastica $k > 0$ e centri i punti $C \equiv (-R, 0)$ e $D \equiv (R, 0)$.



Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

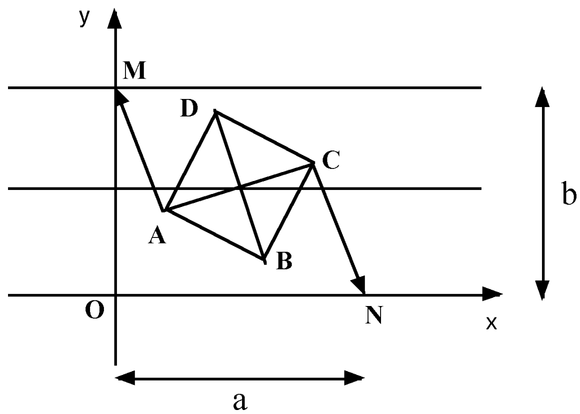
(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(c) determinare le posizioni di equilibrio;

(d) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate;

2. Una lamina materiale pesante omogenea di massa m e' costituita da un quadrato $ABCD$ di raggio l. La lamina si muove sul piano orizzontale $O(x, y)$, con il centro di massa vincolato a scorrere senza attrito sulla retta di equazione $y = b/2$. La lamina stessa puo' inoltre ruotare attorno al centro di massa. Ai due vertici A e C della lamina sono applicate due molle di uguale costante elastica $k > 0$ e centri i punti $M \equiv (0, b)$ ed $N \equiv (a, 0)$.

Si chiede:



(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

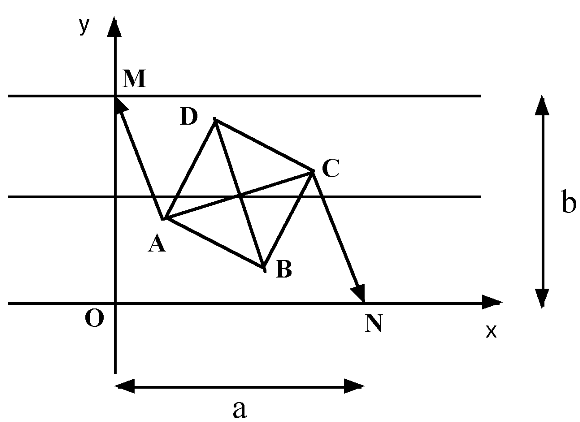
(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) determinare le posizioni di equilibrio;

(e) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate;

(f) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

3. Una lamina materiale pesante omogenea di massa m e' costituita da un quadrato $ABCD$ di raggio l. La lamina si muove sul piano orizzontale $O(x, y)$, con il centro di massa vincolato a scorrere senza attrito sulla retta di equazione $y = b/2$. La lamina stessa puo' inoltre ruotare attorno al centro di massa. Ai due vertici A e C della lamina sono applicate due molle di uguale costante elastica $k > 0$ e centri i punti $M \equiv (0, b)$ ed $N \equiv (a, 0)$.



Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

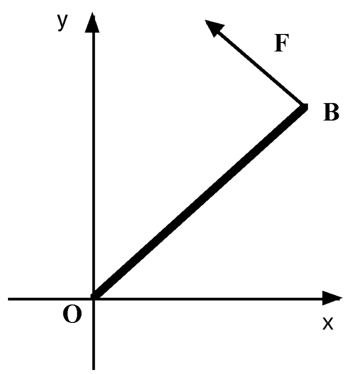
(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) scrivere le equazioni di Lagrange;

(e) studiare il moto del centro di massa;

(f) determinare due integrali primi del moto utilizzando le equazioni di Lagrange trovate.

4. Un'asta materiale pesante omogenea OB di massa m e lunghezza l si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno al suo estremo O che e' fisso. Oltre alla forza di gravita', l'asta e' sottoposta all'azione di una forza $\mathbf{F} = (F/l)\hat{\mathbf{k}} \times (B - O)$ applicata all'estremo B, con $F > 0$ costante e $\hat{\mathbf{k}}$ il versore dell'asse z.



Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere le forze generalizzate lagrangiane;

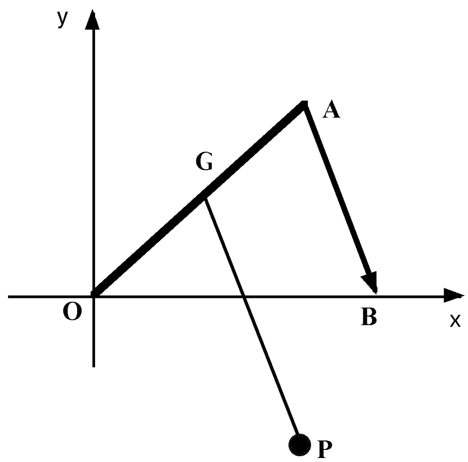
(d) determinare le posizioni di equilibrio;

(e) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate;

(f) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

5. Un'asta materiale pesante omogenea OA di massa M e lunghezza L si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno al suo estremo O che e' fisso. Oltre alla forza di gravita', l'asta e' sottoposta all'azione di una molla di costante elastica $k > 0$ e centro il punto B, situato sull'asse orizzontale passante per O a distanza L da O ed a destra di esso. Il punto medio dell'asta funge inoltre da punto di sospensione di un pendolo matematico costituito da un filo di lunghezza l ed un punto P di massa m.

Si chiede:



(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) determinare le posizioni di equilibrio;

(e) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate;

(f) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

6. Un punto materiale si muove sul piano $z = 0$ sotto l'azione di un campo di forze conservativo il cui potenziale e'

$$U(x, y) = -x^2 - y^2 - \frac{\alpha}{2}(x^4 - y^4 + 2x^2y^2),$$

dove α e' un parametro reale. Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilita' al variare di α in $\mathbf{R}$.

7. In un piano verticale Oxy si consideri un sistema materiale pesante, costituito da due punti di ugual massa m, P scorrevole su Ox e Q scorrevole su una circonferenza fissa di centro $C = (0, -2R)$ e raggio R. Due molle di ugual costante elastica k collegano il punto P rispettivamente con l'origine O e con il punto Q. Sia inoltre $\lambda = mg/kR$.

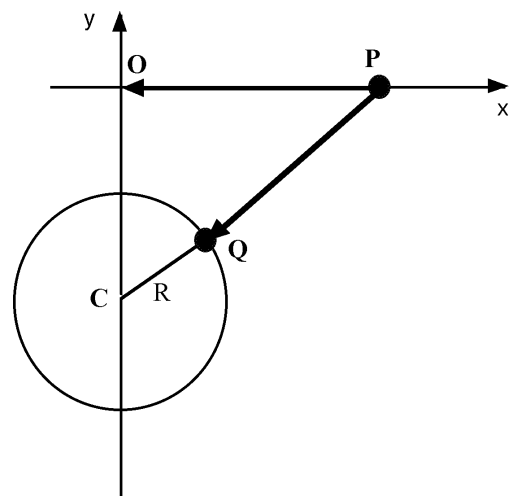
Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

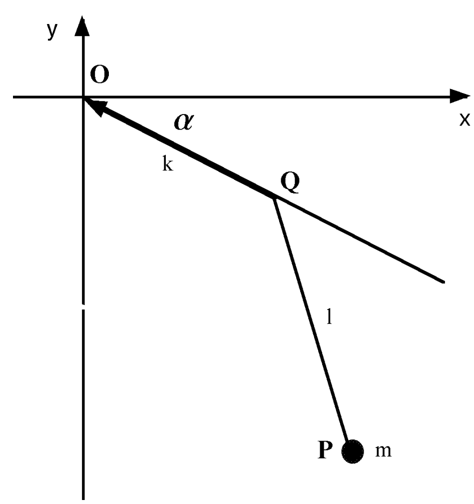
(d) determinare le posizioni di equilibrio;



(e) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate nel caso $\lambda = 7/4$;

(f) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

8. In un piano verticale Oxy si consideri un pendolo matematico, costituito da un punto P di massa m, sospeso mediante un filo flessibile inestensibile di lunghezza l ad un punto Q appartenente alla retta del II e IV quadrante, passante per l'origine e di angolo α con l'asse delle x. Una molla di costante elastica k collega il punto Q con l'origine O.



Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

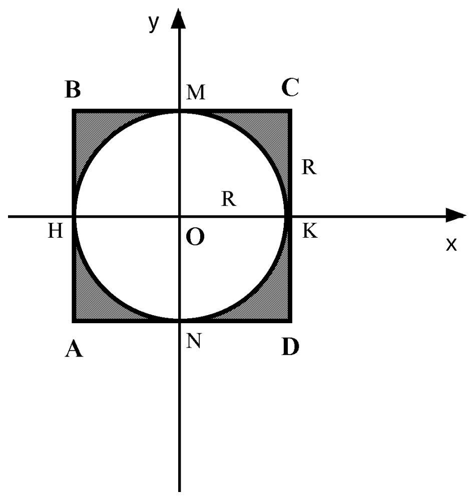
(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) scrivere le equazion i di Lagrange;

(e) determinare le posizioni di equilibrio;

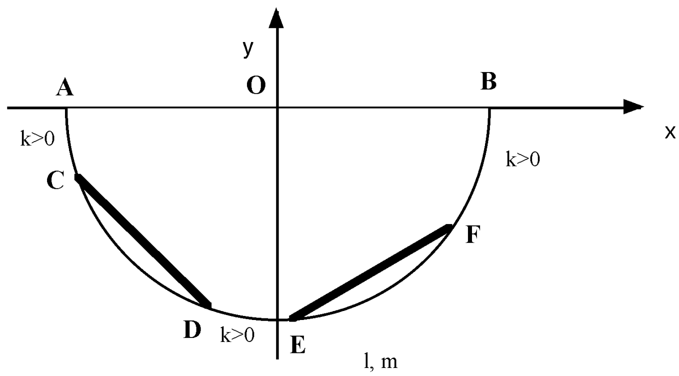
(f) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate.

9. Si consideri una lamina forata di massa M, costituita da un quadrato $ABCD$ di centro O e lato $2R$, privato di un cerchio di centro O e raggio R. Sui punti medi M, N, H, K dei lati del quadrato siano inoltre saldate per un estremo quattro aste uguali, di massa m e lunghezza l ciascuna, disposte perpendicolarmente alla lamina.



Calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$, con gli assi x ed y come in figura e l'asse z perpendicolare al piano della lamina.

10. Nel piano orizzontale $O(x, y)$ si consideri la semicirconferenza AB di centro O e raggio R e situata nel semipiano $y < 0$. Due aste CD e EF, di lunghezza l e massa m, hanno gli estremi vincolati a muoversi sulla semicirconferenza AB. Tre molle di costante elastica $k > 0$ collegano C con A, D con E ed F con B lungo i rispettivi archi di circonferenza.



(a) Determinare il numero dei gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilita';

(e) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

11. Un cerchio pesante omogeneo di centro C, raggio R e massa M si muove nel piano verticale $O(x, y)$, con il punto A del bordo vincolato a scorrere lungo l'asse Ox (orizzontale) ed il cerchio stesso libero di ruotare attorno ad A. Oltre alla forza gravitazionale, il cerchio e' sottoposto all'azione di una molla, di costante elastica $k > 0$, che collega il centro C con l'origine O. Sia, inoltre,

$$\lambda = \frac{Mg}{kR}.$$

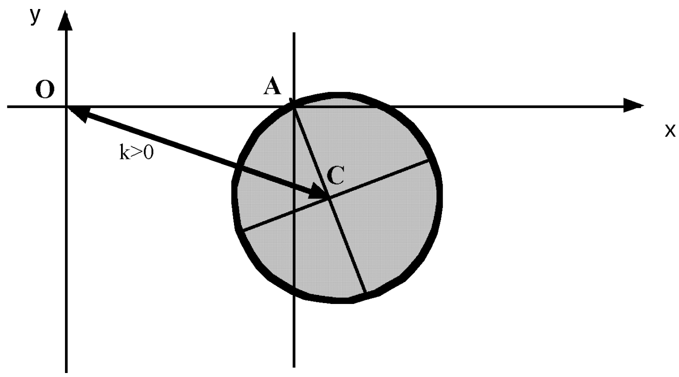
(a) Determinare il numero dei gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilita', discutendo i risultati al variare di λ;

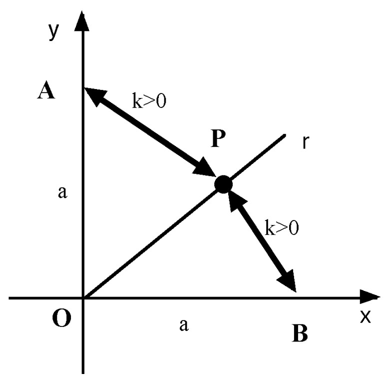
(e) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile nel caso $\lambda > 1$.



12. Un punto materiale P di massa m e' vincolato a muoversi lungo una guida rettilinea r nel piano verticale $O(x, y)$. La retta r ruota attorno all'origine con velocita' angolare costante ω. Oltre alla forza di gravita', sul punto P agiscono due molle, di ugual costante elastica $k > 0$ e centri i punti $A(0, a)$ e $B(a, 0)$, con $a > 0$. Posto

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

si chiede:



(a) determinare il numero dei gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

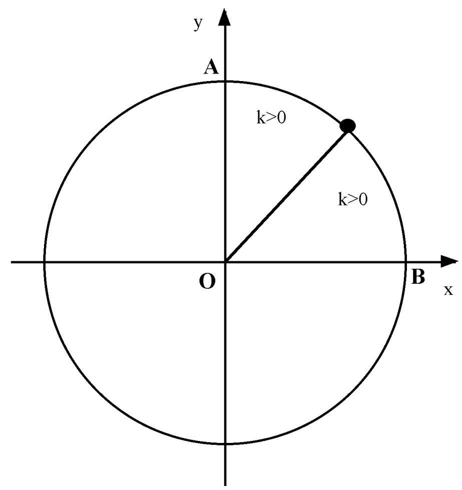
(d) scrivere le equazioni di Lagrange;

(e) studiare il moto del punto P per valori generici dei parametri; considerare, quindi, separatamente il caso $\omega_0 = \omega/\sqrt{2}$ e descrivere qualitativamente il caso $\omega_0 = \omega$.

13. Un punto materiale P di massa m e' vincolato a muoversi lungo una circonferenza γ nel piano orizzontale $O(x, y)$. La circonferenza ha centro nell'origine e raggio R dipendente dal tempo secondo la legge esponenziale $R(t) = e^{\Omega t}$, con Ω reale. Sul punto P agiscono due molle, di ugual costante elastica $k > 0$, centri i punti $A(0, R(t))$ e $B(R(t), 0)$, e dispiegantisi lungo i rispettivi archi di circonferenza AP e BP. Posto

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

si chiede:



(a) determinare il numero dei gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

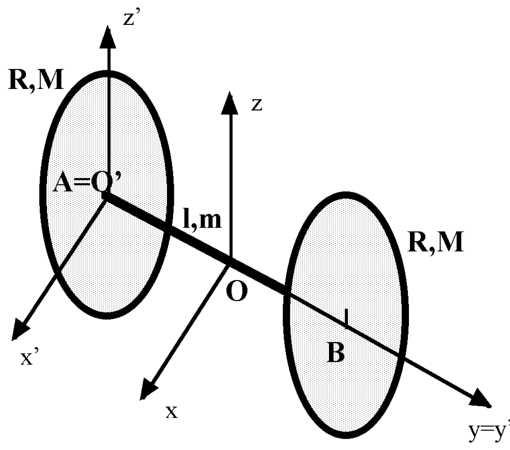
(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) scrivere le equazioni di Lagrange;

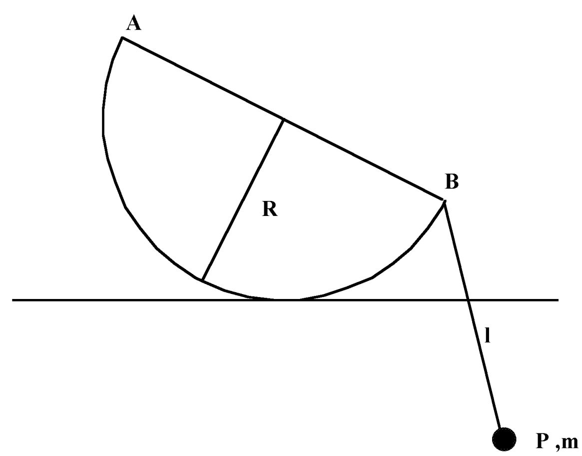
(e) studiare il moto del punto P per valori generici dei parametri; considerare, quindi, separatamente i casi $|\Omega| > \sqrt{2}\omega$ e $|\Omega| < \sqrt{2}\omega$ ed i casi $\Omega > 0$ e $\Omega < 0$.

14. Un manubrio si puo' schematizzare come un corpo rigido costituito da un'asta AB dilunghezza l e massa m alle estremita' della quale sono saldati due cerchi di raggio R e massa M, perpendicolari all'asta e con i centri in corrispondenza degli estremi A e B dell'asta stessa.

Calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia nel sistema di riferimento solidale $O(x, y, z)$, avente l'origine O nel centro di massa dell'asta e l'asse y lungo l'asta stessa. Applicando opportunamente il teorema di Huygens, si calcoli quindi la matrice d'inerzia rispetto ad un sistema solidale $O'(x', y', z')$ avente l'origine O' coincidente con un estremo dell'asta e gli assi paralleli a quelli del sistema $O(x, y, z)$.

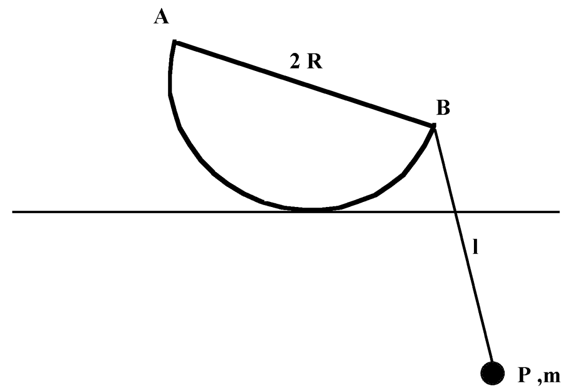


15. Un semicerchio pesante AB di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Un pendolo matematico di lunghezza l e massa m ha il punto di sospensione in B.



   (a) Determinare il numero dei gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;
   (b) scrivere l'energia cinetica del sistema;
   (c) scrivere l'energia potenziale del sistema;
   (d) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilita', tenendo conto delle limitazioni geometriche del sistema;
   (e) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

16. Un corpo rigido di massa M e' costituito da un contorno semicircolare pesante di raggio R e da un'asta diametrale AB. Il contorno rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Un pendolo matematico di lunghezza l e massa m ha il punto di sospensione in B.



(a) Determinare il numero dei gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilita', tenendo conto delle limitazioni geometriche del sistema;

(e) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

17. Una lamina triangolare pesante ABC di massa M, base $BC = 2a$ ed altezza $AH = h$ si muove in un piano verticale $O(x, y)$. La lamina puo' ruotare attorno al vertice A, il quale e' a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Oltre alla forza peso, sulla lamina agiscono due molle di centro l'origine O ed applicate in A e nel centro di massa P_0, di costanti elastiche rispettivamente k_1 e k_2. Si introducano i parametri adimensionali

$$\lambda = \frac{k_2 h}{Mg} \qquad\qquad \mu = \frac{k_1 + k_2}{k_2}$$

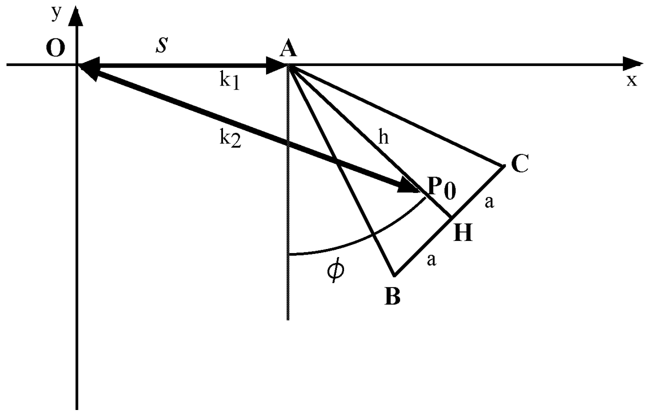
Scegliendo come coordinate Lagrangiane s e ϕ, dove s e' l'ascissa di A e ϕ l'angolo che l'altezza AH forma con la verticale, si chiede:

(a) Scrivere l'energia cinetica del sistema;

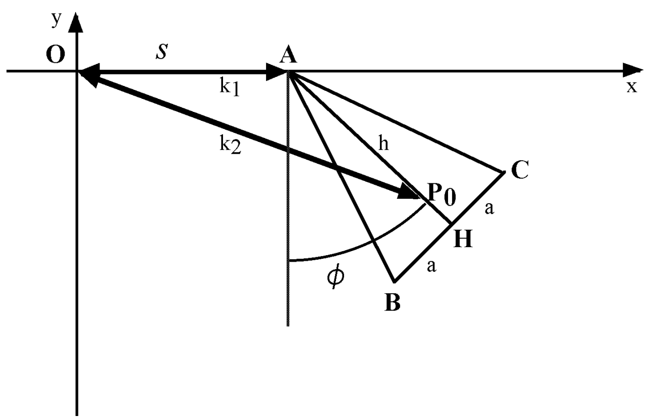
(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(c) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilita' in funzione dei parametri λ e μ introdotti sopra;

(d) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile avente $s = 0$.



18. Una lamina triangolare pesante ABC di massa M, base $BC = 2a$ ed altezza $AH = h$ si muove in un piano verticale $O(x, y)$. La lamina puo' ruotare attorno al vertice A, il quale e' a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Oltre alla forza peso, sulla lamina agiscono due molle di centro l'origine O ed applicate in A e nel centro di massa P_0, di costanti elastiche rispettivamente k_1 e k_2. Scegliendo come coordinate Lagrangiane s e ϕ, dove s e' l'ascissa di A e ϕ l'angolo che l'altezza AH forma con la verticale, si chiede:



(a) Scrivere l'energia cinetica del sistema;

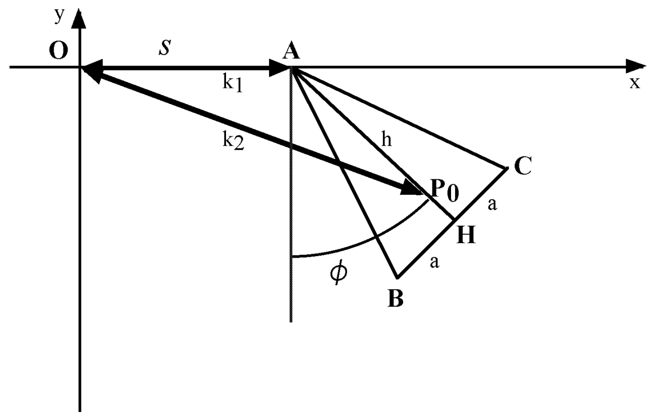
(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(c) scrivere le equazioni di Lagrange (di seconda specie);

(d) stabilire sotto quali condizioni sono possibili moti con $\phi(t) \equiv 0$.

19. Una lamina triangolare pesante ABC di massa M, base $BC = 2a$ ed altezza $AH = h$ si muove in un piano verticale $O(x, y)$. La lamina puo' ruotare attorno al vertice A, il quale e' a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Oltre alla forza peso, sulla lamina agiscono due molle di centro l'origine O ed applicate in A e nel centro di massa P_0, di costanti elastiche rispettivamente k_1 e k_2. Scegliendo come

coordinate Lagrangiane s e ϕ, dove s e' l'ascissa di A e ϕ l'angolo che l'altezza AH forma con la verticale, si chiede:



(a) Calcolare la matrice d'inerzia della lamina rispetto ad un sistema solidale ortogonale antiorario $O'(x', y', z')$ avente l'origine O' coincidente con A, l'asse z' perpendicolare al piano della figura e l'asse x' lungo la bisettrice AH;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema utilizzando solo il teorema di König ed il teorema Huyghens combinati con i risultati del punto precedente;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) scrivere le equazioni di Lagrange (di seconda specie).

20. Una lamina triangolare pesante ABC di massa M, base $BC = 2a$ ed altezza $AH = h$ si muove in un piano verticale $O(x, y)$. La lamina puo' ruotare attorno al vertice A, il quale e' a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Oltre alla forza peso, sulla lamina agiscono due molle di centro l'origine O ed applicate in A e nel centro di massa P_0, di costanti elastiche rispettivamente k_1 e k_2. Si introducano i parametri adimensionali

$$\lambda = \frac{k_2 h}{Mg} \qquad \mu = \frac{k_1 + k_2}{k_2}$$

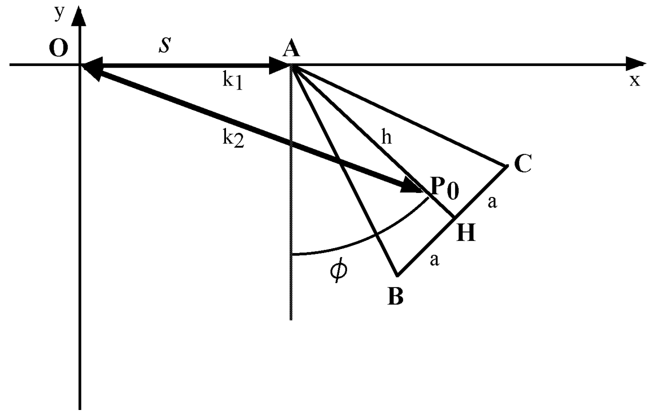
Scegliendo come coordinate Lagrangiane s e ϕ, dove s e' l'ascissa di A e ϕ l'angolo che l'altezza AH forma con la verticale, si chiede:

(a) Calcolare la matrice d'inerzia della lamina rispetto ad un sistema solidale ortogonale antiorario $O'(x', y', z')$ avente l'origine O' coincidente con A, l'asse z' perpendicolare al piano della figura e l'asse x' lungo la bisettrice AH;

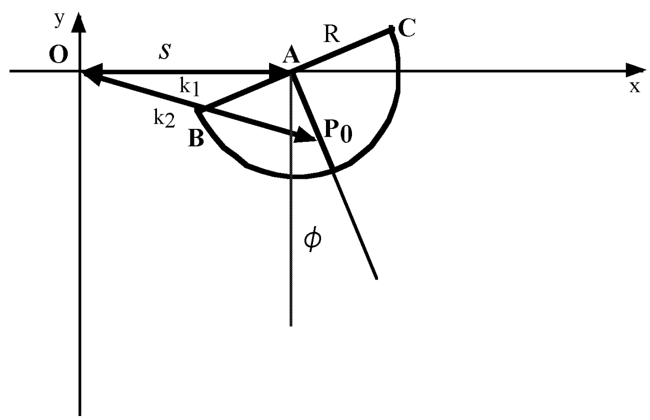
(b) scrivere l'energia cinetica del sistema utilizzando solo il teorema di König ed il teorema Huyghens combinati con i risultati del punto precedente;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(d) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilita' in funzione dei parametri λ e μ introdotti sopra.



21. Una lamina semicircolare pesante, di diametro $BC = 2R$ e di massa M, si muove in un piano verticale $O(x, y)$. Sia A il punto medio del diametro BC. La lamina puo' ruotare attorno al punto A, il quale e' a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Oltre alla forza peso, sulla lamina agiscono due molle di centro l'origine O ed applicate in A e nel centro di massa P_0, di costanti elastiche rispettivamente k_1 e k_2. Scegliendo come coordinate Lagrangiane s e ϕ, dove s e' l'ascissa di A e ϕ l'angolo che la retta AP_0 forma con la verticale, si chiede:



(a) Calcolare la matrice d'inerzia della lamina rispetto ad un sistema solidale ortogonale antiorario $O'(x', y', z')$ avente l'origine O' coincidente con A, l'asse z' perpendicolare al piano della figura e l'asse x' lungo il diametro BC;

(b) calcolare le coordinate del baricentro P_0 nel sistema $O'(x', y', z')$ definito sopra;

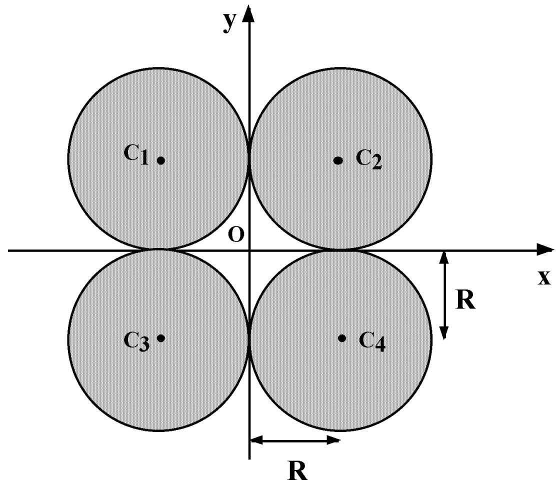
(c) scrivere l'energia cinetica del sistema utilizzando solo il teorema di König ed il teorema Huyghens combinati con i risultati del punto precedente;

(d) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(e) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilita'.

22. Nel piano $O(x, y)$, e' data una lamina materiale, costituita da quattro cerchi pieni

di ugual raggio R, ugual massa m e centri i punti $C_1 = (-R, R)$, $C_2 = (R, R)$, $C_3 = (-R, -R)$ e $C_4 = (R, -R)$. Si chiede:



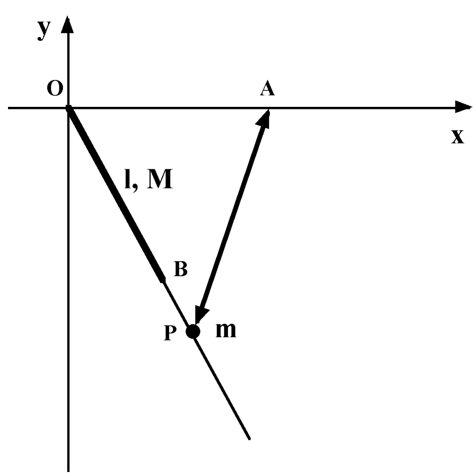
(a) Calcolare la matrice d'inerzia della lamina rispetto al sistema solidale $O(x, y, z)$ avente l'asse z perpendicolare al piano della figura;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema supponendo che la lamina ruoti attorno al punto C_2 con velocita' angolare costante

$$\overrightarrow{\omega} = \omega \frac{\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}}$$

.

23. Un'asta materiale pesante OB, di massa M e lunghezza l e' libera di ruotare attorno al suo estremo O nel piano orizzontale $O(x, y)$. Sia r la retta sulla quale giace l'asta (quindi r ruota con l'asta). Su r e' libero di scorrere senza attrito un punto P di massa m, il quale e' sottoposto alla forza di una molla di costante elastica k e centro il punto $A = (l, 0)$. Scelte come coordinate lagrangiane l'angolo ϕ che l'asta forma con la verticale e la distanza s di P dall'estremo B, si chiede:



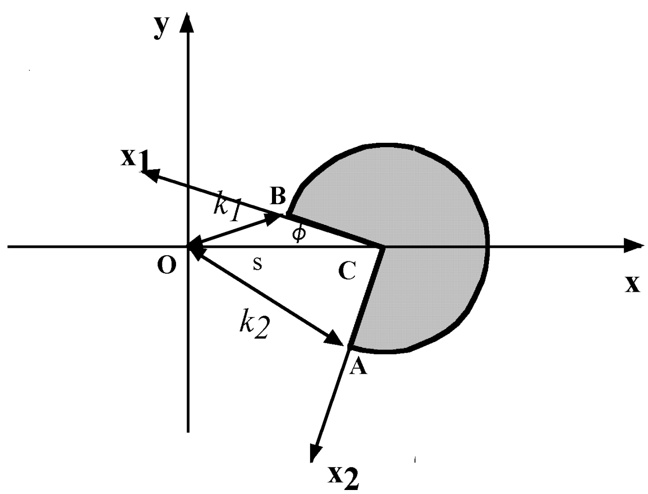
(a) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilita';

(d) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

24. Una lamina materiale pesante di massa M e' costituita da un cerchio omogeneo di raggio R e centro C privato di un settore AB di angolo $\pi/2$ (cioe' di un quarto di cerchio - vedi figura). La lamina si muove nel piano orizzontale $O(x, y)$, con il centro C vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Sulla lamina agiscono due molle di costanti elastiche k_1 e k_2, di centro l'origine O ed applicate rispettivamente in A ed in B. Utilizzando come coordinate lagrangiane la distanza s di C da O, e l'angolo φ che CB forma con l'asse Ox misurato in senso orario a partire dall'asse Ox, si chiede:



(a) Calcolare gli elementi della matrice d'inerzia in un sistema di riferimento solidale $C(x_1, x_2, x_3)$ con l'origine in C, gli assi x_1 ed x_2 diretti rispettivamente come CB e CA e l'asse x_3 perpendicolare al piano della figura;

(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(c) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(d) determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilita';

(e) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile avente $s > 0$.

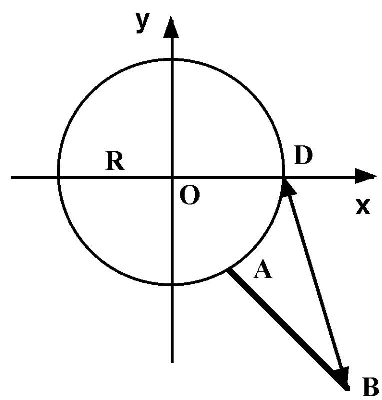
25. E' dato il campo di forze $\mathbf{F} = -k_1 x\hat{\mathbf{i}} - k_2 y\hat{\mathbf{j}} - k_3 z\hat{\mathbf{k}}$, definito in tutto $\mathbf{R}^3$, con $k_1 \neq k_2 \neq k_3$ costanti reali positive. Dire se

- si tratta di un campo centrale;
- si tratta di un campo conservativo ed, in caso affermativo, determinarne il potenziale.

Un punto materiale P di massa m e' vincolato ad appartenere al piano $z = 0$, mediante vincoli lisci bilaterali ed e' sottoposto al campo di forze sopra definito. Usando come coordinate lagrangiane le coordinate polari del punto P, r e ϕ,

- scrivere le forze generalizzate lagrangiane;
- scrivere l'energia cinetica;
- scrivere le equazioni di Lagrange;
- studiare il moto del punto P (risolvendo le equazioni di Lagrange) nel caso $k_1 = k_2$ e k_3 qualsiasi.

26. Un'asta omogenea pesante AB, di lunghezza l e massa m, si muove nel piano verticale $O(x, y)$, libera di ruotare attorno al suo estremo A, a sua volta vincolato ad appartenere alla circonferenza di centro l'origine e raggio R. Sull'estremo B dell'asta agisce inoltre una molla, di costante elastica $k > 0$ e centro il punto D, proiezione dell'estremo B sull'asse x. Scegliendo come coordinate lagrangiane gli angoli ϕ e θ



che rispettivamente il vettore $A - O$ e l'asta AB formano con la verticale, si chiede di:

(a) scrivere l'energia potenziale V del sistema;

(b) determinare tutte le configurazioni di equilibrio;

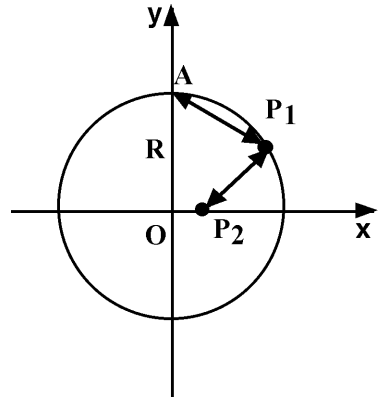
(c) discutere la stabilita' delle configurazioni di equilibrio nelle quali l'asta e' disposta lungo l'asse y.

27. Due punti materiali P_1 e P_2 si muovono sul piano verticale $O(x, y)$. In tale piano, il punto P_1 e' vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza di centro l'origine e raggio R, mentre P_2 e' vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Oltre alla forza peso, sui due punti agiscono due molle, una di costante elastica $k_1 > 0$ che collega il punto P_1 con il punto $A(0, R)$ ed una di costante elastica $k_2 > 0$ che collega P_1 e P_2 fra di loro. Si chiede di:

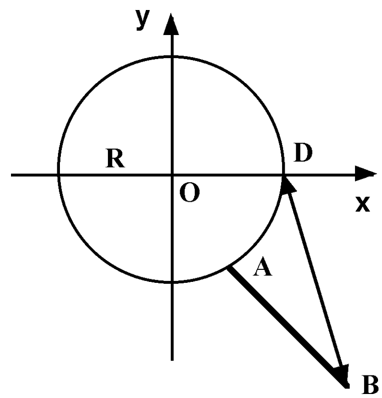
(a) determinare il numero di gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia potenziale V del sistema;

(c) determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilita'.



28. Un'asta omogenea pesante AB, di lunghezza l e massa m, si muove nel piano verticale $O(x,y)$, libera di ruotare attorno al suo estremo A, a sua volta vincolato ad appartenere alla circonferenza di centro l'origine e raggio R. Sull'estremo B dell'asta agisce inoltre una molla, di costante elastica $k > 0$ e centro il punto $D(R,0)$. Si



chiede:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia cinetica T del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale V del sistema;

(d) scrivere le equazioni di Lagrange.

29. E' dato il campo di forze $\mathbf{F} = -k_1 x\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}} - k_2\hat{\mathbf{k}}$, definito in tutto $\mathbf{R}^3$, con $k_1 \neq k_2$ ed a costanti reali positive. Dire se

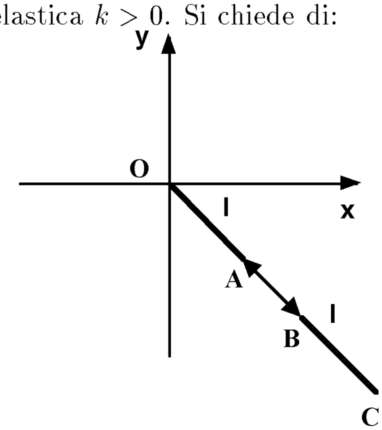
- si tratta di un campo centrale;
- si tratta di un campo conservativo ed, in caso affermativo, determinarne il potenziale.

Un punto materiale P di massa m e' vincolato ad appartenere al piano $z = 0$, mediante vincoli lisci bilaterali ed e' sottoposto al campo di forze sopra definito. Si chiede di

- determinare il numero di gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

- scrivere le forze generalizzate lagrangiane;
- scrivere l'energia cinetica;
- scrivere le equazioni di Lagrange;
- studiare il moto del punto P (risolvendo le equazioni di Lagrange), tracciando anche un grafico approssimativo della traiettoria.

30. Un sistema materiale e' costituito da due aste materiali omogenee pesanti, OA e BC, di ugual lunghezza l e massa m, che si muovono nel piano verticale $O(x, y)$. L'asta OA e' libera di ruotare attorno al suo estremo O, che e' fisso, mentre l'asta BC e' vincolata ad appartenere alla stessa retta dell'asta OA ma e' libera di scorrere su di essa. Gli estremi B dell'asta BC ed A dell'asta OA sono inoltre collegati da una molla di costante elastica $k > 0$. Si chiede di:

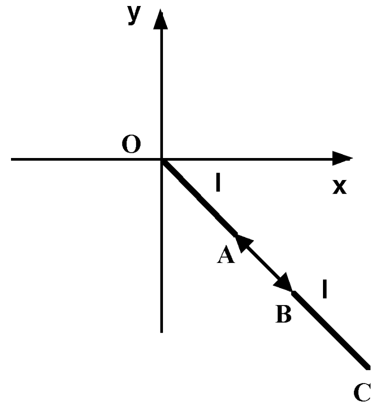


    (a) determinare il numero di gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;
    (b) scrivere l'energia potenziale V del sistema;
    (c) determinare le configurazioni di equilibrio;
    (d) discutere la stabilita' delle configurazioni di equilibrio trovate.

31. Un sistema materiale e' costituito da due aste materiali omogenee pesanti, OA ed BC, di lunghezza l e massa m, che si muovono nel piano verticale $O(x, y)$. L'asta OA e' libera di ruotare attorno al suo estremo O, che e' fisso, mentre l'asta BC e' vincolata ad appartenere alla stessa retta dell'asta OA ma e' libera di scorrere su di essa. Sull'estremo B dell'asta BC agisce inoltre una molla, di costante elastica $k > 0$, che la collega con l'estremo A dell'asta OA. Si chiede:

    (a) determinare il numero di gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;
    (b) scrivere l'energia cinetica T del sistema;
    (c) scrivere l'energia potenziale V del sistema;
    (d) scrivere le equazioni di Lagrange.

32. Due punti materiali P_1 e P_2 di ugual massa m si muovono sul piano verticale $O(x, y)$. In tale piano, il punto P_1 e' vincolato a scorrere senza attrito sulla parabola di equazione $y = x^2 - a^2$, mentre P_2 e' vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Oltre alla forza peso, sui due punti agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che li collega fra di loro. Si chiede di:



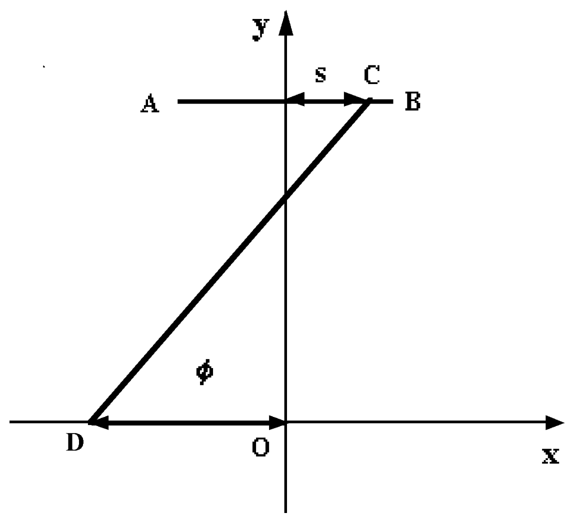
(a) determinare il numero di gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere l'energia potenziale V del sistema;

(c) determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilita'.

33. Una sistema materiale e' costituito da due aste pesanti AB e CD, di massa m e lunghezza L e $2L$ rispettivamente, che si muovono nel piano verticale $O(x, y)$. L'asta AB e' vincolata a muoversi di moto traslatorio, sempre parallela all'asse Ox e con il baricentro vincolato a scorrere senza attrito sull'asse Oy. L'asta CD ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito su AB e sull'asse Ox. Due molle di ugual costante elastica $k > 0$ collegano i vertici C e D rispettivamente con il baricentro di AB e con l'origine O.

Scelte quali coordinate lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo φ che l'asta CD forma con l'asse Ox, si chiede di:



(a) scrivere l'energia potenziale del sistema;

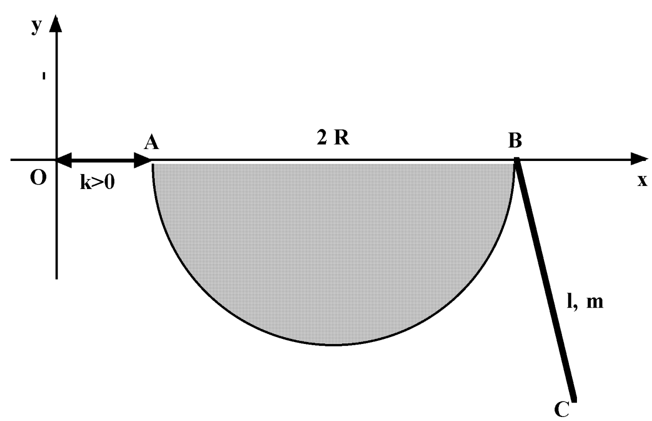
(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilita';

(d) calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile nel caso $k = mg/2L$.

34. Un punto materiale P di massa m e' vincolato a muoversi senza attrito su una guida orizzontale ed e' sottoposto all'azione di una molla di centro il punto O, appartenente alla guida, e di costante elastica $k > 0$. Nell'intervallo $|x| < a$, e' presente una forza di attrito viscoso di costante viscosa λ. All'istante iniziale il punto si trova nella posizione $x(0) = 2a$ con velocita' nulla. Posto $\omega = k/m$ e $2\epsilon = \lambda/m$, determinare il moto del sistema nell'ipotesi $\epsilon = \omega\sqrt{3}/2$. Calcolare inoltre a quale istante di tempo si ha il primo passaggio del punto P per il centro O.

35. Una lamina a forma di semicerchio di raggio R e massa M si muove in un piano verticale, avendo il diametro AB vincolato a scorrere senza attrito su una guida orizzontale. La lamina si mantiene sempre nel semipiano al di sotto della guida. All'estremo B del diametro e' sospesa un'asta BC, di lunghezza l e massa m, che puo' ruotare, sempre nel medesimo piano verticale, attorno a B. Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una molla di costante elastica $k > 0$, centro il punto O della guida ed applicata al punto A.



(a) Determinare il numero dei gradi di liberta' e scegliere le coordinate lagrangiane;

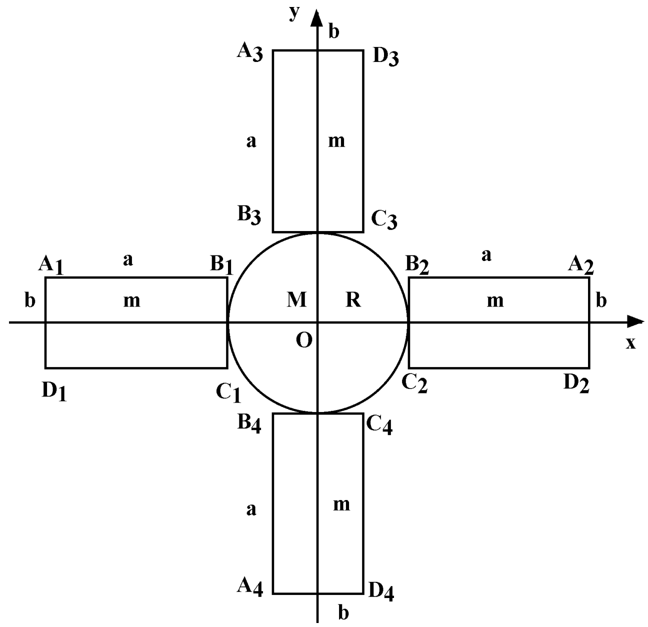
(b) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(c) scrivere l'energia potenziale del sistema;

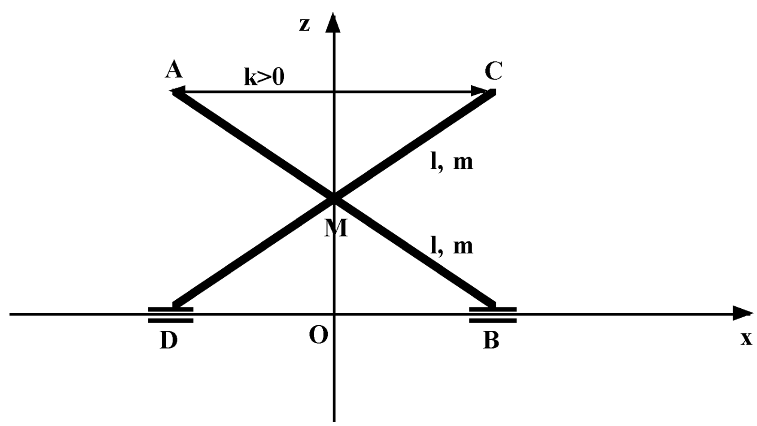
(d) scrivere le equazioni di Lagrange;

(e) determinare i moti possibili del sistema in cui l'asta rimane costantemente in posizione verticale.

36. Calcolare la matrice d'inerzia del corpo rigido in figura, rispetto al sistema solidale indicato (l'asse z perpendicolare al piano della figura). Il corpo rigido e' costituito da quattro lamine rettangolari omogenee $A_iB_iC_iD_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, di ugual massa m e con $A_iB_i = C_iD_i = a$ e $B_iC_i = A_iD_i = b$, con $a > b$, e da un cerchio omogeneo di centro l'origine, massa M e raggio R cui le lamine sono tangenti.



37. Un sistema materiale pesante e' costituito da due aste omogenee AB e CD, di ugual lunghezza l ed ugual massa m, che si muovono sul piano verticale $O(x,z)$. Le due aste hanno il punto medio M in comune e possono ruotare attorno ad esso. Inoltre, il punto medio M e' vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse z e gli estremi B e D delle due aste sono vincolati a scorrere senza attrito sull'asse x. Oltre alla forza peso, sulle due aste agisce una molla di costante elastica $k > 0$ che collega gli estremi A e C. Si chiede:



(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema;

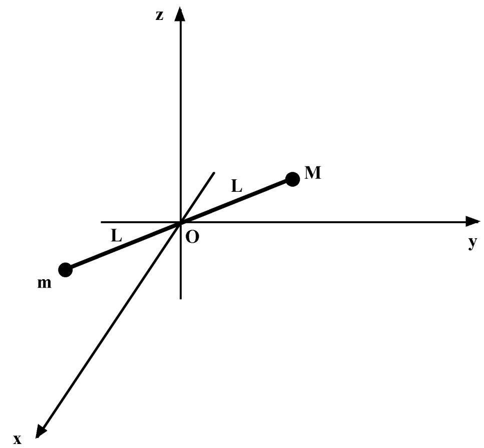
(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(c) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(d) scrivere le equazioni di Lagrange.

38. Un sistema rigido e' costituito da due punti materiali P_1 e P_2, di massa rispettivamente m ed M, collegati da un'asta priva di massa di lunghezza $2L$. Il sistema e'

vincolato a ruotare attorno al punto medio dell'asta O, che e' fisso. Introdotto un sistema cartesiano ortogonale $O(x,y,z)$, fisso nello spazio, si chiede di:



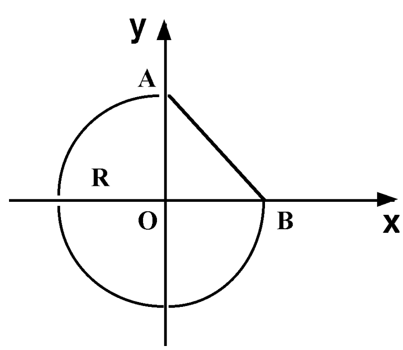
(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema ed introdurre le coordinate lagrangiane;

(b) scrivere la velocita' angolare nel sistema fisso;

(c) scrivere l'energia cinetica del sistema sommando le energie cinetiche dei due punti materiali;

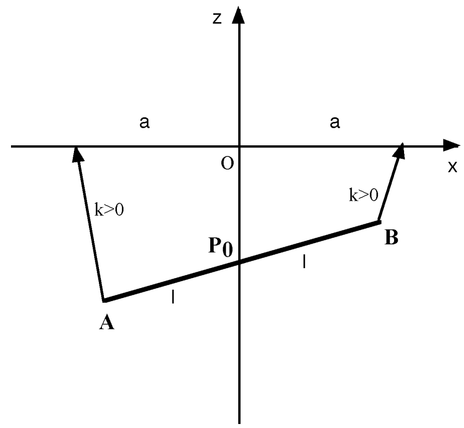
(d) scrivere l'energia cinetica del sistema considerato come corpo rigido e verificare che le due espressioni sono uguali.

39. Una lamina materiale omogenea di massa m e' costituita dai tre quarti di un cerchio di centro O e raggio R e dal triangolo rettangolo isoscele AOB di lato R (vedi figura).



Si chiede di calcolare tutti gli elementi della matrice d'inerzia $\mathbf{I}(O)$ nel sistema solidale $O(x,y,z)$ avente gli assi x ed y come in figura e l'asse z perpendicolare al piano della figura.

40. Un'asta materiale pesante AB di massa m e lunghezza $2l$ si muove su un piano verticale $O(x,z)$. Il punto medio P_0 e' vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse z, mentre i punti A e B sono soggetti all'azione di due molle, di ugual costanti elastiche $k>0$, e centri due punti dell'asse x, di ascisse a e $-a$ rispettivamente, con $a>0$.



Si chiede:

(a) determinare il numero di gradi di liberta' del sistema e scegliere le coordinate Lagrangiane;

(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(c) determinare le configurazioni di equilibrio;

(d) studiare la stabilita' delle configurazioni di equilibrio trovate.

41. Un cerchio omogeneo di massa M e raggio R si muove nel piano verticale Oxz, con z verticale ascendente. Il cerchio e' libero di ruotare attorno al suo centro C, che e' a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse z. Sul punto B del bordo e' applicata una molla di costante elastica $k>0$, che collega B con l'origine O. Sia s la coordinata (con segno) del centro C sull'asse z e sia ϕ l'angolo che il vettore $B-C$ forma con l'orizzontale (vedi figura). Scelte s e ϕ come coordinate lagrangiane, si chiede di:

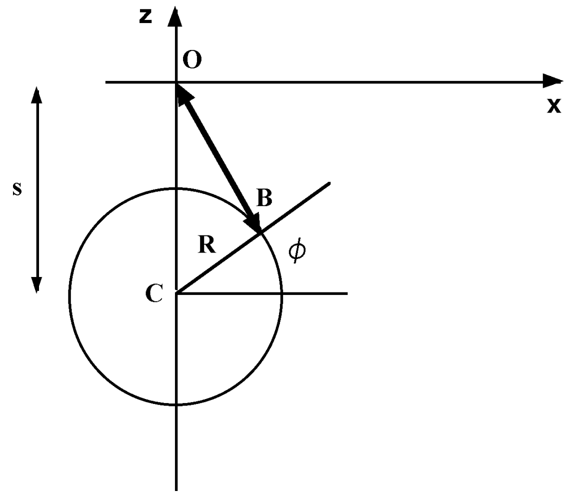
(a) scrivere l'energia cinetica del sistema;

(b) scrivere l'energia potenziale del sistema;

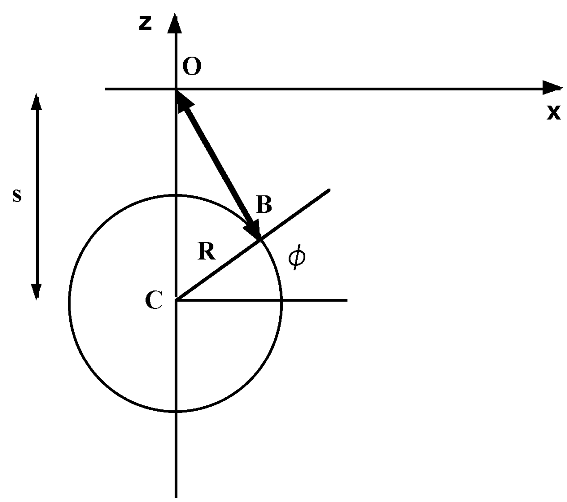
(c) scrivere le equazioni di Lagrange;

(d) studiare i moti possibili a ϕ costante;

(e) studiare i moti possibili a z costante.



42. Un cerchio omogeneo di massa M e raggio R si muove nel piano verticale Oxz, con z verticale ascendente. Il cerchio e' libero di ruotare attorno al suo centro C, che e' a sua volta vincolato a scorrere senza attrito sull'asse z. Sul punto B del bordo e' applicata una molla di costante elastica $k > 0$, che collega B con l'origine O. Sia s la coordinata (con segno) del centro C sull'asse z e sia φ l'angolo che il vettore $B - C$ forma con l'orizzontale (vedi figura). Scelte s e φ come coordinate lagrangiane, si chiede di:



(a) scrivere l'energia potenziale del sistema;

(b) determinare le posizioni di equilibrio;

(c) studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio trovate.